

**BIFURKASI HOPF PADA MODEL DINAMIK S-I-P
DENGAN PENYAKIT PADA POPULASI PREY DAN FUNGSI RESPON HOLLING TYPE II****Gesti Essa Waldhani^{1*}, Chalimatusadiah²**^{1*}Universitas Bina Sarana Informatika; Jakarta^{1*,2}Jurusan Teknologi Informasi, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Bina Sarana
Informatikae-mail: 1*gesti.gew@bsi.ac.id, 2chalimatusadiah.cld@bsi.ac.id**ABSTRAK**

Pada penelitian ini, model dinamik S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling type II dengan pemanenan dan waktu tunda dibahas. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap dan membahas keberadaan bifurkasi Hopf. Modifikasi lain yang diberikan pada model adalah penggunaan waktu tunda. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi suatu penyakit untuk menyebabkan *prey* sakit (waktu inkubasi). Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap, kemudian menganalisis kestabilan titik tetap dan membahas keberadaan bifurkasi Hopf. Modifikasi lain yang diberikan pada model adalah penggunaan waktu tunda. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi suatu penyakit untuk menyebabkan mangsa sakit (waktu inkubasi). Kasus pertama adalah model tanpa waktu tunda, diperoleh 2 titik tetap tidak stabil dan 2 titik tetap stabil. Salah satunya adalah titik tetap interior dengan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Kasus kedua adalah model dengan waktu tunda diperoleh nilai kritis tundaan. Bifurkasi hopf terjadi ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai tundaan kritis dan juga memenuhi kondisi transversalitas. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan. Apabila nilai waktu tunda yang diberikan kurang dari nilai kritis tundaan, solusi sistem terkontrol menuju kondisi yang seimbang. Kemudian ketika nilai waktu tunda lebih besar dari nilai kritis tundaan, solusi sistem terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

Kata kunci : Bifurkasi Hopf; Model S-I-P; Holling tipe II; Penyakit.**ABSTRACT**

In this paper, a dynamic S-I-P model with disease in the prey population and Holling type II functional response with harvesting and time-delay were discussed. Model analysis is carried out by determining fixed points, then analyzing the stability of the fixed points and discussing the existence of the Hopf bifurcation. Another modification given to the model is the use of time delays. Delay time is the time needed for a disease to make prey sick (incubation time). The first case is a model without time delay, it is obtained that 2 fixed points are unstable and 2 fixed points are stable. One of them is the interior fixed point tested with the Routh-Hurwitz criteria. The second case is a model with a delay time, the critical delay value is obtained. Hopf bifurcation occurs when the delay time value is equal to the critical delay value and also fulfills the transversality condition. Observations on the model simulation are carried out by varying the value of the delay time. When the Hopf bifurcation occurs, the graph on the solution plane shows a constant oscillatory movement. If the value of the delay time given is less than the critical value of the delay, the controlled system solution goes to a balanced state. Then when the delay time value is greater than the critical delay value, the system solution continues to fluctuate causing an unstable system condition.

Keywords : Hopf bifurcation; S-I-P model; Holling type II; Disease.**1. PENDAHULUAN**

Ekologi merupakan ilmu yang mempelajari tentang ekosistem [1]. Ekosistem merupakan partisi dari alam semesta pada umumnya [2]. Dalam suatu ekosistem sedikitnya tersusun dari komponen hidup dan tak hidup. Komponen hidup yaitu manusia, hewan, dan tumbuhan sedangkan komponen tak hidup merupakan komponen pendukung kehidupan seperti air, tanah, udara, sinar matahari dan sebagainya. Salah satu bahasan penting dalam ekologi yakni rantai-makanan.

Menurut Alex [3], dalam suatu rantai makanan minimal terdapat dua macam spesies yaitu spesies *predator* atau pemangsa dan spesies *prey* atau mangsa. Rantai makanan merupakan penentu keseimbangan ekosistem, sehingga perlu dikaji mendalam. Kajian mengenai rantai makanan salah satunya yaitu pemodelan matematika *predator-prey* yang dikembangkan dalam cabang ilmu matematika ekologi.

Permasalahan lainnya yang terjadi dalam suatu populasi adalah epidemi. Menurut Lee [4] peristiwa epidemi dalam suatu populasi adalah “*When a disease occurs at a frequency higher than is expected, it is said to be epidemic. A localized epidemic may be referred to as an outbreak*”. Oleh karena itu dalam pemodelan matematika di kaji berbagai macam model matematis untuk mengetahui terjadi atau tidaknya suatu epidemi dalam populasi. Model epidemi klasik membagi populasi menjadi dua kelas, yaitu kelas rentan (*susceptible*) dan terinfeksi (*infected*). Sub-populasi rentan, rentan terhadap infeksi dan sub-populasi yang terinfeksi dapat memindahkan infeksi ke individu rentan. Dalam model *S-I* ukuran populasi adalah $N = S + I$, di mana S adalah sub-populasi rentan dan I sub-populasi terinfeksi [5].

Sistem interaksi dalam ekosistem yang merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik adalah sistem interaksi *predator-prey*, di mana *prey* sebagai populasi yang dimangsa dan *predator* sebagai populasi yang memangsa [6]. Sistem *predator-prey* adalah salah satu jenis sistem yang merupakan gabungan atau interaksi dari dua populasi yaitu predator (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Interaksi antar dua populasi ini sangat penting karena kelangsungan hidup makhluk hidup tergantung pada keseimbangan lingkungan sekitarnya. Keseimbangan tersebut dapat tercapai jika jumlah rata-rata dari populasi *predator* dan *prey* yang sedang berinteraksi sesuai dengan ukuran dan proporsinya.

Model matematika *predator-prey* yang banyak dipakai adalah model yang terdiri atas dua spesies berbeda di mana salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya. Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra [7]. Model matematika Lotka-Volterra dua spesies *predator-prey* dapat di tulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x - \alpha xy, \end{aligned} \quad (1)$$

Model sederhana ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Salah satu modifikasi dilakukan dengan penambahan fungsi respon.

Fungsi respon dalam model interaksi *predator-prey* menurut [8] adalah jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon tipe I, tipe II, dan tipe III. Fungsi respon tipe I terjadi pada *predator* yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu mangsanya. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari mangsa. Fungsi respon tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang.

Para peneliti sebelumnya telah mengembangkan model *predator-prey* ketika terdapat wabah penyakit pada populasi *predator* atau *prey*. Tewa, dkk [9] menganalisis stabilitas local dan global model *predator-prey* dengan penyakit menular SIS dan fungsi respon Holling type II. Solusi periodic menunjukkan paling sedikit satu populasi yang punah karena penyakit.

Moustafa [10] menganalisis bifurkasi Hopf dan transkritik model eko-epidemiologi berorde fraksional. Simulasi menunjukkan orde fraksional dapat membantu mengendalikan koeksistensi *prey* yang rentan, *prey* yang terinfeksi dan *predator*.

Fardinah [11] menganalisis kestabilan model mangsa -pemangsa dengan fungsi respon Holling Tipe II dan adanya mangsa sakit. Hasil penelitian menunjukkan terjadinya kepunahan pemangsa dan eksistensi semua subpopulasi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan.

Penelitian serupa dilakukan oleh Kooi [12], yang meneliti model *predator-prey* dua spesies pada kasus penyakit hanya terjadi pada populasi *predator*. Pada model mekanisme cara *predator* berburu berdasarkan fungsi respon Holling Tipe II. Dari hasil analisis model tersebut juga diperoleh sistem yang lebih stabil dengan adanya kenaikan laju infeksi penyakit.

Berbeda dari kajian sebelumnya, dalam penelitian ini akan memodifikasi model epidemi *predator-prey* Khoirun [13] dengan model epidemi *predator-prey* yang terdiri dari dua spesies di mana *predator* berburu mangsa mengikuti model Lotka-Volterra dan mekanisme penularan penyakit pada spesies *prey*. Pada penelitian ini akan dikonstruksi model matematika epidemi *predator-prey* di mana terdapat penyebaran

penyakit pada populasi *prey* yang mengikuti hukum aksi masa sederhana dan mekanisme cara berburu *predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe II. Model matematika yang terbentuk terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *Susceptible-prey*, laju pertumbuhan populasi *infected-prey*, dan laju pertumbuhan populasi *predator*. Ketiga persamaan tersebut membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinear [14]. Pada model SIP ini diasumsikan adanya waktu tunda. Waktu tunda menyatakan waktu inkubasi penularan penyakit, yaitu waktu yang dibutuhkan bagi suatu penyakit untuk menyebabkan *prey* sakit.

Dari model tersebut dilakukan analisis dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh Pastor [15]. Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk menganalisis perilaku sistem *predator-prey* dan fungsi respon Holling tipe II. Sebuah tulisan yang diformulasikan dengan judul “BIFURKASI HOPF PADA MODEL DINAMIK S-I-P DENGAN PENYAKIT PADA POPULASI *PREY* DAN FUNGSI RESPON HOLLING TYPE II”.

2. MODEL MATEMATIKA

Model yang akan dibahas dalam artikel ini adalah model S-I-P interaksi dua spesies *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II. Asumsi-asumsi yang digunakan pada model *predator-prey* sebagai berikut.

1. Laju pertumbuhan populasi *prey* memiliki pola pertumbuhan logistik.
2. Penyakit hanya menginfeksi populasi *prey* dan *prey* yang terinfeksi tidak bisa disembuhkan atau menjadi kebal.
3. Makanan dari *prey* memiliki jumlah yang terbatas sehingga terjadi kompetisi antara *prey* sendiri dalam memperebutkan makanan.
4. Persediaan makanan *predator* bergantung pada populasi *prey*.
5. Pada saat terjadinya interaksi *prey* dengan *predator*, populasi *prey* akan menurun sedangkan populasi *predator* akan meningkat.
6. Dalam interaksinya, *predator* hanya memakan mangsa yang terinfeksi.
7. Dalam ekosistem, hanya ada 1 jenis mangsa untuk dikonsumsi oleh *predator*.
8. *Prey* merespon kehadiran *predator* sehingga *predator* memerlukan waktu untuk menangkap *prey* (*predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe II).

Modifikasi model *predator-prey* S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe II dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \beta x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta x_1 x_2 - \frac{ax_2 y}{b+x_2} - cx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \mu \left(\frac{ax_2 x_3}{b+x_2}\right) - dx_3 \end{cases} \quad (2)$$

dengan $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ dan $x_3(0) > 0$

dimana $S = \frac{x_1}{K}, I = \frac{x_2}{K}, P = \frac{x_3}{K}, T = rt > 0, A = \frac{a}{r} > 0, B = \frac{b}{K} > 0, C = \frac{c}{r} > 0, D = \frac{d}{r} > 0$ dan $m = \frac{\beta K}{r} > 0$.

Pada sistem (2), $x_1 = \frac{S}{K}$ mempresentasikan kepadatan populasi *prey* rentan penyakit disertai dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $x_2 = \frac{I}{K}$ mengartikan kepadatan populasi *prey* yang terinfeksi disertai pengaruh dari lingkungan, $x_3 = \frac{P}{K}$ mengartikan kepadatan populasi *predator* disertai pengaruh lingkungan, $\frac{T}{r} = t$ mempresentasikan kelipatan dari waktu t , $a = Ar$ angka penurunan kepadatan populasi *prey* akibat interaksi antara *prey* dan *predator*, $b = BK$ mempresentasikan tingkat kejenuhan pemangsa dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $\beta = \frac{mK}{r}$ tingkat penyebaran penyakit menular pada populasi mangsa $c = Cr$ dan $d = Dr$ masing-masing adalah laju kematian alami dari mangsa dan *predator*, μ tingkat pertumbuhan populasi *predator*. Sistem (2) dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS(T)}{dT} = S(T)(1 - S(T)) - mS(T)I(T - \tau) \\ \frac{dI(T)}{dT} = mS(T)I(T - \tau) - \frac{AS(T)P(T)}{B+I(T)} - CI \\ \frac{dP(T)}{dT} = \mu \left(\frac{AI(T)P(T)}{B+I(T)}\right) - DP(T) \end{cases} \quad (3)$$

dengan $S(0) > 0, I(0) > 0$ dan $P(0) > 0$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Titik Ekuilibrium

Sistem (3) mencapai titik kesetimbangan ketika $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dP}{dt} = 0$, sehingga sistem (3) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{dS}{dt} = S(1 - S) - mSI = 0, \\ \text{(b)} \quad & \frac{dI}{dt} = mSI - \frac{ASP}{B+I} - CI, \\ \text{(c)} \quad & \frac{dP}{dt} = \mu \left(\frac{AIP}{B+I} \right) - DP. \end{aligned} \quad (4)$$

Dari persamaan (4), diperoleh $\mu \left(\frac{AIP}{B+I} \right) - DP = 0 \Leftrightarrow P = 0 \vee I = \frac{DB}{\mu A - D}$. Jika, $P = 0$ dari persamaan (b) pada sistem (4), diperoleh

$$mSI - CI = 0 \Leftrightarrow I(mS - C) = 0 \Leftrightarrow I = 0 \vee S = \frac{C}{m}.$$

Substitusi $I = 0$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (4), maka

$$S(1 - S) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = 1.$$

Jadi, untuk $I = 0$ dan $P = 0$ titik kesetimbangannya adalah $E_0(0,0,0)$ dan $E_1(1,0,0)$. Substitusi $S = \frac{C}{m}$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (4) yang menghasilkan $I = -\frac{-m+C}{m^2}$. Jadi, jika $C < m$, maka titik kesetimbangannya adalah $E_2\left(\frac{C}{m}, -\frac{-m+C}{m^2}, 0\right)$. Jika $I = \frac{DB}{\mu A - D}$ dari persamaan (a) pada sistem (4), diperoleh sebagai berikut.

$$S(1 - S - mI) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = \frac{\mu A - D - mDB}{\mu A - D}.$$

Substitusi $I = \frac{DB}{\mu A - D}$ dan $S = \frac{\mu A - D - mDB}{\mu A - D}$ ke persamaan (a) pada sistem (4) sehingga diperoleh $P = -\frac{DB^2(-m\mu A + Dm + B D m^2 + C\mu A - CD)\mu}{(\mu A - D)^2(\mu A - D - mDB)}$. Maka jika $\mu A > D$ dan $-m(\mu A - D) + B D m^2 + C(\mu A - D) < 0$, $E^*(S^*, I^*, P^*)$ adalah titik ekuilibrium.

3.2 Stabilitas Tanpa Waktu Tunda

Matriks Jacobian dari persamaan (4) diberikan oleh

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2S - mI & -mS & 0 & mI - \frac{AP}{B+I} & mS + \frac{ASP}{(B+I)^2} - C & -\frac{AS}{B+I} & 0 & \frac{\mu AP}{B+I} - \frac{\mu AIP}{(B+I)^2} & \frac{\mu AI}{B+I} - D \end{pmatrix}$$

Pada titik E_0 , matriks Jacobiannya adalah $J(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -C \vee \lambda_3 = -D$. Jadi E_0 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_1 , matriks Jacobiannya adalah $J(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -m & 0 & 0 & m - C & -\frac{A}{B} & 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = m - C \vee \lambda_3 = -D$. Jadi, E_1 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_2 , matriks Jacobiannya adalah $J\left(\frac{C}{m}, -\frac{-m+C}{m^2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{C}{m} - C & 0 & 1 - \frac{C}{m} - \lambda & -\frac{ACm}{Bm^2+m-C} & 0 & 0 & -\frac{-\mu Am + \mu AC + DBm^2 + Dm - DC}{Bm^2+m-C} \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = -\frac{-\mu Am + \mu AC + DBm^2 + Dm - DC}{Bm^2+m-C}$. Dua nilai eigennya dapat ditentukan dari polynomial karakteristik.

$$\lambda^2 + \frac{C}{m}\lambda + C - \frac{C^2}{m}.$$

Karena $\frac{C}{m} > 0$ dan $C - \frac{C^2}{m} > 0$ maka semua bagian real dari solusi persamaan (4) negative jika $\mu A(C - m) + DBm^2 + D(m - C) > 0$.

Pada titik $E^*(S^*, I^*, P^*)$ dengan $S^* = \frac{\mu A - D - mDB}{\mu A - D}$, $I^* = \frac{DB}{\mu A - D}$ dan $P^* = -\frac{DB^2(-m\mu A + Dm + B D m^2 + C\mu A - CD)\mu}{(\mu A - D)^2(\mu A - D - mDB)}$ matriks Jacobiannya adalah $J(E^*) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 & M_3 & M_4 & M_5 & 0 & M_6 & 0 \end{pmatrix}$ dengan

$$M_1 = -\frac{\mu A - D - DmB}{\mu A - D},$$

$$M_2 = -\frac{m(\mu A - D - DmB)}{\mu A - D},$$

$$M_3 = \frac{CBD}{\mu A - D - DmB},$$

$$M_4 = -\frac{\mu^2 A^2 C - \mu^2 A^2 m + \mu ABDm^2 + BD^2 m^2 - CD^2 + D^2 m}{A\mu(\mu A - D)},$$

$$M_5 = -\frac{\mu A - D - DmB}{B\mu},$$

$$M_6 = -\frac{(-m\mu A + Dm + BDm^2 + C\mu A - CD)DB}{A(\mu A - D - DmB)}.$$

Persamaan karakteristik $J(E^*)$ adalah

$$\lambda^3 + \lambda^2(-M_1 - M_4) + \lambda(M_1M_4 - M_2M_3 - M_5M_6) + M_1M_5M_6 = 0.$$

Jika $\mu^2 A^2(1 + C - m) + \mu AD(-1 + Bm(m - 1)) + D^2(m(1 + Bm) - C) > 0$ maka $-M_1 - M_4 > 0$.

Jika $\mu^3 A^3(1 - D)(m - C) + \mu^2 A^2 D((C - m)(1 - 3D) + DBm^2 - 2Bm^2) + \mu AD^2((3D + 1)(-m + C) - 2DBm^2 + m^3 B^2 + mCB) + D^3((D + 1)(m - C) - mBC + Bm^2(2 + Bm) + m^3 B^2 + DBm^2 + 2Bm^2) > 0$ maka

$$M_1M_4 - M_2M_3 - M_5M_6 > 0.$$

Jika $(\mu A - D - DmB)(DBm^2 + (\mu A - D)(C - m)) < 0$ maka

$$M_1M_5M_6 > 0.$$

Jika $\mu^5 A^5(m - C + C^2(D - 1) + 2mC(1 - D) + m^2(D - 1)) + \mu^4 A^4(-3BDm^2(1 - m) + DmBC(1 - 3m) + D(m^2 + C^2) - 2Dm(1 + C) + 2CD(1 + 3mD) + 2D^2Bm^2(C - m) - 3D^2(m^2 + C^2)) + \mu^3 A^3(-4mCD^2(D + 1) - 4D^3Bm^2(C - m) + 3D^2Bm^2(1 - Bm^2 + mB) - CD^2Bm(-C + m) + 2C^2D^2(1 + D) + D^2m^3B^2(C + Dm) + 2m^2D^2(1 + D)) + \mu^2 A^2(4mCD^3(1 - D) - 2CD^3(1 - CD + C) - D^3m^4B^2(B - Bm + D) + 2D^3m(1 - m + Dm) + CD^3Bm(7m - C + 2m^2B - 3 - mB) + 3D^3Bm^2(1 - 2m - Bm^2)) + \mu A(D^4C(1 - 3CD - C) - D^4m(1 + m + 3Dm) + D^4Bm^2(3Bm^2 + 2B^2m^3 - 3 - DBm^2 - 3Bm - m^2B^2 - 4Dm) + D^4BmC(-Bm^2 + 4Dm + 2 - C + m + Bm) + 2mCD^4(3D + 1) - 2D^5mC(1 + D) + C^2D^5(D + 1) + D^5Bm^3(3 + B^2m^2 + 2D + DBm + 3Bm) + D^5BmC(-4m - 2Dm + C - 2Bm^2) + D^5m^2(1 + D) > 0$ maka

$$(-M_1 - M_4)(M_1M_4 - M_2M_3 - M_5M_6) > M_1M_5M_6.$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, jika $\mu^2 A^2(1 + C - m) + \mu AD(-1 + Bm(m - 1)) + D^2(m(1 + Bm) - C) > 0$, $\mu^3 A^3(1 - D)(m - C) + \mu^2 A^2 D((C - m)(1 - 3D) + DBm^2 - 2Bm^2) + \mu AD^2((3D + 1)(-m + C) - 2DBm^2 + m^3 B^2 + mCB) + D^3((D + 1)(m - C) - mBC + Bm^2(2 + Bm) + m^3 B^2 + DBm^2 + 2Bm^2) > 0$, $(\mu A - D - DmB)(DBm^2 + (\mu A - D)(C - m)) < 0$ dan $\mu^5 A^5(m - C + C^2(D - 1) + 2mC(1 - D) + m^2(D - 1)) + \mu^4 A^4(-3BDm^2(1 - m) + DmBC(1 - 3m) + D(m^2 + C^2) - 2Dm(1 + C) + 2CD(1 + 3mD) + 2D^2Bm^2(C - m) - 3D^2(m^2 + C^2)) + \mu^3 A^3(-4mCD^2(D + 1) - 4D^3Bm^2(C - m) + 3D^2Bm^2(1 - Bm^2 + mB) - CD^2Bm(-C + m) + 2C^2D^2(1 + D) + D^2m^3B^2(C + Dm) + 2m^2D^2(1 + D)) + \mu^2 A^2(4mCD^3(1 - D) - 2CD^3(1 - CD + C) - D^3m^4B^2(B - Bm + D) + 2D^3m(1 - m + Dm) + CD^3Bm(7m - C + 2m^2B - 3 - mB) + 3D^3Bm^2(1 - 2m - Bm^2)) + \mu A(D^4C(1 - 3CD - C) - D^4m(1 + m + 3Dm) + D^4Bm^2(3Bm^2 + 2B^2m^3 - 3 - DBm^2 - 3Bm - m^2B^2 - 4Dm) + D^4BmC(-Bm^2 + 4Dm + 2 - C + m + Bm) + 2mCD^4(3D + 1) - 2D^5mC(1 + D) + C^2D^5(D + 1) + D^5Bm^3(3 + B^2m^2 + 2D + DBm + 3Bm) + D^5BmC(-4m - 2Dm + C - 2Bm^2) + D^5m^2(1 + D) > 0$, maka semua bagian real nilai eigen adalah negative. Jadi E^* adalah titik stabil.

3.3 Stabilitas dengan Waktu Tunda

Dalam menganalisis kestabilan E^* dengan waktu tunda. Persamaan (4) perlu dilinierkan di sekitar titik keseimbangan E^* , maka diperoleh model linierisasi

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \frac{dS(T)}{dt} = b_1 S(T) + b_2 I(T - \tau), \\
 \text{(b)} \quad & \frac{dI(T)}{dT} = b_3 S(T) + b_4 I(T - \tau) + b_5 P(T), \\
 \text{(c)} \quad & \frac{dP(T)}{dT} = b_6 I(T) + b_7 P(T)
 \end{aligned} \tag{5}$$

dimana

$$b_1 = 1 - 2S^* - mI^*, b_2 = -mS^*, b_3 = mI^* - \frac{AP^*}{B+I^*}, b_4 = mS^* + \frac{AS^*P^*}{(B+I^*)^2} - C, b_5 = -\frac{AS^*}{B+I^*}, b_6 = \frac{\mu AP^*}{B+I^*} - \frac{\mu AI^*P^*}{(B+I^*)^2}, b_7 = \frac{\mu AI^*}{B+I^*} - d$$

Misalkan solusi sistem (5) adalah

$$S(T) = le^{\lambda T}, I(T) = me^{\lambda T}, P(T) = ne^{\lambda T} \tag{6}$$

Substitusi persamaan (5) ke persamaan (6) lalu bagi dengan $e^{\lambda T}$ sehingga diperoleh

$$\{l\lambda = b_1 l + b_2 m e^{-\lambda \tau}, m\lambda = b_3 l + b_4 m e^{-\lambda \tau} + b_5 n, n\lambda = b_6 m + b_7 n\} \tag{7}$$

Sistem (7) dapat ditulis dalam bentuk berikut.

$$[l \ m \ n] \begin{bmatrix} b_1 & b_2 e^{-\lambda \tau} & 0 \\ b_3 & b_4 e^{-\lambda \tau} & b_5 \\ 0 & b_6 & b_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$|b_1 - \lambda \quad b_2 e^{-\lambda \tau} \quad 0 \\ b_3 \quad b_4 e^{-\lambda \tau} - \lambda \quad b_5 \\ 0 \quad b_6 \quad b_7 - \lambda| = 0 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (-b_1 - b_7 - b_4 e^{-\lambda \tau})\lambda^2 + (b_1 b_7 + b_1 b_4 e^{-\lambda \tau} + b_7 b_4 e^{-\lambda \tau} + b_2 b_3 e^{-\lambda \tau})\lambda - b_1 b_7 b_4 e^{-\lambda \tau} - b_2 b_3 b_7 e^{-\lambda \tau} = 0 \tag{9}$$

Nilai eigen persamaan (9) adalah bilangan real negatif dan bilangan kompleks dengan bagian real negatif. Jadi dengan waktu tunda, E^* stabil jika dan hanya jika $-b_1 - b_7 - b_4 > 0$, $b_1 b_7 + b_1 b_4 + b_7 b_4 + b_2 b_3 > 0$ dan $-b_1 b_3 b_5 > 0$. Sehingga nilai eigen persamaan karakteristik (9) diasumsikan $\lambda = u + i\omega$ dengan $u = 0$ dan $\omega > 0$ ($\lambda = +i\omega$). Untuk melihat perubahan kestabilan model persamaan dengan waktu tunda, nilai eigen disubstitusi ke persamaan (9) sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristik.

$$\begin{aligned}
 (i\omega)^3 + (-b_1 - b_7 - b_4(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau))(i\omega)^2 + (b_1 b_7 + b_1 b_4(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) + b_7 b_4(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) + b_2 b_3(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau))(i\omega) - b_1 b_7 b_4(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) - b_2 b_3 b_7(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0 \\
 \Leftrightarrow (\omega^2 b_1 + \omega^2 b_7 + \omega^2 b_4 \cos\omega\tau + \omega b_1 b_4 \sin\omega\tau + \omega b_7 b_4 \sin\omega\tau + \omega b_2 b_3 \sin\omega\tau - b_1 b_7 b_4 \cos\omega\tau - b_2 b_3 b_7 \cos\omega\tau) + i(-\omega^3 - \omega^2 b_4 \sin\omega\tau + \omega b_1 b_7 + \omega b_1 b_4 \cos\omega\tau + \omega b_7 b_4 \cos\omega\tau + \omega b_2 b_3 \cos\omega\tau + b_1 b_7 b_4 \sin\omega\tau + b_2 b_3 b_7 \sin\omega\tau) = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Persamaan (10) bernilai nol jika bagian imajiner dan real sama dengan nol sehingga diperoleh

$$(-\omega^2 b_4 + b_1 b_7 b_4 + b_2 b_3 b_7) \cos\omega\tau + (-\omega b_1 b_4 - \omega b_7 b_4 - \omega b_2 b_3) \sin\omega\tau = \omega^2 b_1 + \omega^2 b_7 \tag{11}$$

$$\text{dan } (\omega b_1 b_4 + \omega b_7 b_4 + \omega b_2 b_3) \cos\omega\tau + (-\omega^2 b_4 + b_1 b_7 b_4 + b_2 b_3 b_7) \sin\omega\tau = \omega^3 - \omega b_1 b_7 \tag{12}$$

Kemudian mengeliminasi persamaan (11) dan (12) terhadap τ dengan mengkuadratkan setiap ruas persamaan tersebut, maka diperoleh.

$$\begin{aligned}
 (\omega^4 b_4^2 - 2\omega^2 b_4^2 b_1 b_7 - 2\omega^2 b_4 b_2 b_7 b_3 + b_1^2 b_7^2 b_4^2 + 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 + b_2^2 b_7^2 b_3^2) \cos^2 \omega\tau + \\
 2(\omega^3 b_4^2 b_1 + \omega^3 b_4^2 b_7 + \omega^3 b_4 b_2 b_3 - b_1^2 b_7 b_4^2 \omega - b_1 b_7^2 b_4^2 \omega - 2b_1 b_7 b_4 b_2 b_3 \omega - b_2 b_7^2 b_3 b_4 \omega - \\
 b_2^2 b_7 b_3^2 \omega) \cos\omega\tau \sin\omega\tau + (\omega^2 b_1^2 b_4^2 + 2\omega^2 b_1 b_4^2 b_7 + 2\omega^2 b_1 b_4 b_2 b_3 + \omega^2 b_7^2 b_4^2 + 2\omega^2 b_7 b_4 b_2 b_3 + \\
 \omega^2 b_2^2 b_3^2) \sin^2 \omega\tau = \omega^4 b_1^2 + 2\omega^4 b_1 b_7 + \omega^4 b_7^2
 \end{aligned} \tag{13}$$

dan

$$\begin{aligned}
 (\omega^4 b_4^2 - 2\omega^2 b_4^2 b_1 b_7 - 2\omega^2 b_4 b_2 b_7 b_3 + b_1^2 b_7^2 b_4^2 + 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 + b_2^2 b_7^2 b_3^2) \sin^2 \omega\tau + \\
 2(-\omega^3 b_4^2 b_1 - \omega^3 b_4^2 b_7 - \omega^3 b_4 b_2 b_3 + b_1^2 b_7 b_4^2 \omega + b_1 b_7^2 b_4^2 \omega + 2b_1 b_7 b_4 b_2 b_3 \omega + b_2 b_7^2 b_3 b_4 \omega + \\
 b_2^2 b_7 b_3^2 \omega) \cos\omega\tau \sin\omega\tau + (\omega^2 b_1^2 b_4^2 + 2\omega^2 b_1 b_4^2 b_7 + 2\omega^2 b_1 b_4 b_2 b_3 + \omega^2 b_7^2 b_4^2 + 2\omega^2 b_7 b_4 b_2 b_3 + \\
 \omega^2 b_2^2 b_3^2) \cos^2 \omega\tau = \omega^6 - 2\omega^4 b_1 b_7 + \omega^2 b_1^2 b_7^2
 \end{aligned} \tag{14}$$

Persamaan (13) dan (14) dijumlahkan dan dikelompokkan berdasarkan pangkatnya, sehingga diperoleh persamaan polinomial berderajat enam sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \omega^6 + (b_4^2 - b_1^2 - 2b_1 b_7 - b_7^2 + 2b_1 b_7) \omega^4 + (-2b_4^2 b_1 b_7 - 2b_4 b_2 b_7 b_3 + b_1^2 b_4^2 + 2b_1 b_4^2 b_7 + \\
 2b_1 b_4 b_2 b_3 + b_7^2 b_4^2 + 2b_7 b_4 b_2 b_3 + b_2^2 b_3^2 - b_1^2 b_7^2) \omega^2 \\
 + b_1^2 b_7^2 b_4^2 + 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 + b_2^2 b_7^2 b_3^2 = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Selanjutnya, nilai waktu tunda kritis (τ_k) dengan tahapan sebagai berikut.

Langkah pertama substitusi ω_k ke persamaan (11) dan (12) kemudian mengeliminasi fungsi cosinus dari persamaan (11) dan (12)

$$\begin{aligned} & (-\omega_k^2 b_1^2 b_4^2 - 2\omega_k^2 b_1 b_4 b_2 b_3 - \omega_k^2 b_7^2 b_4^2 - \omega_k^2 b_2^2 b_3^2 - \omega_k^4 b_4^2 - b_1^2 b_7^2 b_4^2 - 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 - \\ & b_2^2 b_3^2 b_7^2) \sin \omega_k \tau \\ & = \omega_k^3 b_1^2 b_4 + \omega_k^3 b_1 b_2 b_3 + \omega_k^3 b_7^2 b_4 + \omega_k^5 b_4 + \omega_k b_1^2 b_7^2 b_4 + \omega_k b_1 b_7^2 b_2 b_3 \end{aligned} \quad (16)$$

Selanjutnya mengeliminasi fungsi sinus dari persamaan (11) dan (12)

$$\begin{aligned} & (\omega_k^4 b_4^2 + b_1^2 b_7^2 b_4^2 + 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 + b_2^2 b_7^2 b_3^2 + \omega_k^2 b_1^2 b_4^2 + 2\omega_k^2 b_1 b_4 b_2 b_3 + \omega_k^2 b_7^2 b_4^2 + \\ & \omega_k^2 b_2^2 b_3^2) \cos \omega_k \tau = \omega_k^2 b_7^2 b_2 b_3 + \omega_k^4 b_2 b_3 \end{aligned} \quad (17)$$

Dari (15) dan (16) diperoleh

$$\tau_k = \left(-\frac{\omega_k^3 b_1^2 b_4 + \omega_k^3 b_1 b_2 b_3 + \omega_k^3 b_7^2 b_4 + \omega_k^5 b_4 + \omega_k b_1^2 b_7^2 b_4 + \omega_k b_1 b_7^2 b_2 b_3}{\omega_k^2 b_7^2 b_2 b_3 + \omega_k^4 b_2 b_3} \right) \quad (18)$$

Selanjutnya diferensialkan persamaan (9) terhadap τ , maka diperoleh

$$\lambda^3 + J\lambda^2 + K\lambda + L\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + M\lambda e^{-\lambda\tau} + N e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (19)$$

Dengan $J = b_1 - b_7, K = b_1 b_7, L = -b_4, M = b_1 b_4 + b_7 b_4 + b_2 b_3, N = -b_1 b_7 b_4 - b_2 b_3 b_7$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{d(\lambda^3)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + J \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + K \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + L \left\{ \lambda^2 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} (-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} \\ & + M \left\{ \lambda \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} (-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} + N \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} (-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}) \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} + 2J\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + K \frac{d\lambda}{d\lambda} - L\lambda^3 e^{-\lambda\tau} - L\lambda^2 \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + 2L\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - M\lambda^2 e^{-\lambda\tau} \\ & - M\lambda \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + M \frac{d\lambda}{d\lambda} e^{-\lambda\tau} - N\lambda e^{-\lambda\tau} - N\tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{(L\lambda^2 + M\lambda + N)\lambda e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - (L\lambda^2 + M\lambda + N)\tau e^{-\lambda\tau} + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}}$$

Dari persamaan (19), dipunyai $e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda}{L\lambda^2 + M\lambda + N}$. Maka diperoleh

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda)}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - \tau(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda) + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_b}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\lambda(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda)}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - \tau(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda) + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}} \\ & = \frac{i\omega_b(-i\omega_b)^3 - J(i\omega_b)^2 - Ki\omega_b}{3(i\omega_b)^2 + 2Ji\omega_b + K - \tau_b(-i\omega_b)^3 - J(i\omega_b)^2 - Ki\omega_b + (2Li\omega_b + M)(\cos \omega_b \tau_b - i \sin \omega_b \tau_b)} \\ & = \frac{-3\omega_b^2 + 2Ji\omega_b + K - \tau_b i\omega_b^3 - \tau_b J\omega_b^2 + \tau_b Ki\omega_b + 2Li\omega_b \cos \omega_b \tau_b + 2L\omega_b \sin \omega_b \tau_b + M \cos \omega_b \tau_b - Mi \sin \omega_b \tau_b}{- \omega_b^4 + iJ\omega_b^3 + K\omega_b^2} \\ & = \frac{-\omega_b^4 + K\omega_b^2 + J\omega_b^3 i}{P_1^2 + Q_1^2} \cdot (P_1 - Q_1 i) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 & = -3\omega_b^2 + K - \tau_b J\omega_b^2 + 2L\omega_b \sin \omega_b \tau_b + M \cos \omega_b \tau_b \\ Q_1 & = 2J\omega_b - \tau_b \omega_b^3 + \tau_b K\omega_b + 2L\omega_b \cos \omega_b \tau_b - L \sin \omega_b \tau_b \\ & = \frac{3\omega_b^6 - 4K\omega_b^4 + 2J^2\omega_b^4 + K^2\omega_b^2}{P_1^2 + Q_1^2} \end{aligned}$$

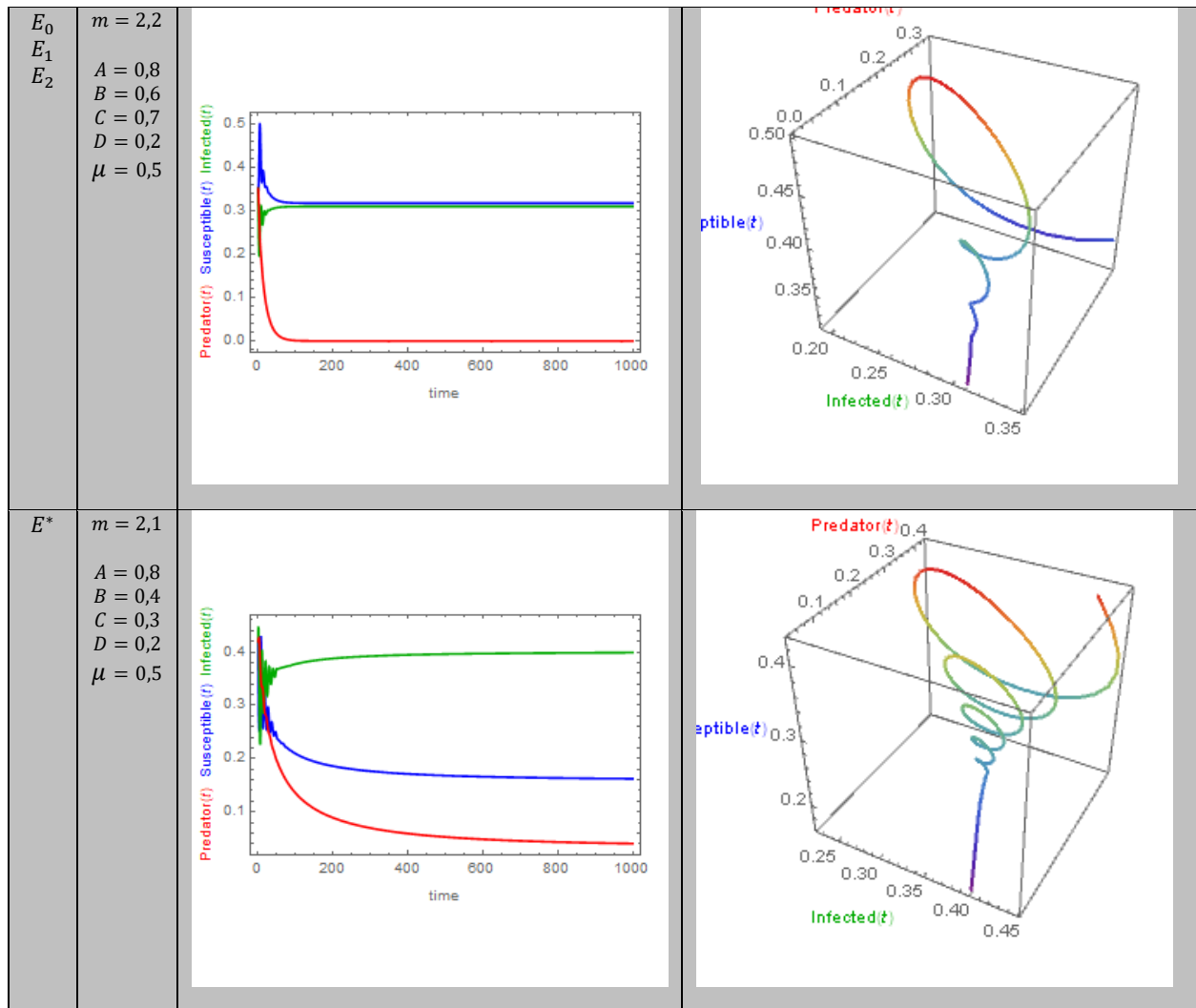
Jika ω_b adalah akar positif terkecil dari (15) (kecuali jika akar tersebut merupakan akar kembar maka pilihlah akar terkecil berikutnya), maka

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_b} = \frac{\omega_b^2(3\omega_b^4 + (-4K + 2J^2)\omega_b^2)}{P_1^2 + Q_1^2} \neq 0$$

Yang menunjukkan bahwa kondisi transversal terpenuhi, sehingga terjadi bifurkasi Hopf pada $\tau = \tau_b$.

3.4 Simulasi Tanpa Waktu Tunda

Pada bagian ini, dibahas simulasi model di titik E_0, E_1, E_2 dan E^* . Untuk menemukan solusi, dipilih nilai-nilai parameter sebagai berikut.


Gambar 1. Bidang solusi dan Potret fase

3.5 Simulasi dengan Waktu Tunda

Simulasi numerik model *predator-prey* dengan waktu tunda dilakukan untuk menunjukkan adanya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap E^* .

Tabel 1. Nilai parameter di titik ekuilibrium E^* dengan waktu tunda

Parameter	Nilai
m	2,1
A	0,8
B	0,4
C	0,3
D	0,2
μ	0,5

Dari Tabel 1 diperoleh

$$S^* = \frac{\mu A - D - mDB}{\mu A - D} = 0,16.$$

$$I^* = \frac{DB}{\mu A - D} = 0,4.$$

$$P^* = -\frac{DB^2(-m\mu A + Dm + BDm^2 + C\mu A - CD)\mu}{(\mu A - D)^2(\mu A - D - mDB)} = 0,09.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium $E^*(0,16; 0,4; 0,09)$.

Kemudian dari nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 1, diperoleh

$$b_1 = 1 - 2S^* - mI^* = -0,16$$

$$b_2 = -mS^* = -0,336$$

$$b_3 = mI^* - \frac{AP^*}{B+I^*} = 0,75$$

$$b_4 = mS^* + \frac{AS^*P^*}{(B+I^*)^2} - C = 0,054$$

$$b_5 = -\frac{AS^*}{B+I^*} = -0,16$$

$$b_6 = \frac{\mu AP^*}{B+I^*} - \frac{\mu AI^*P^*}{(B+I^*)^2} = 0,0225$$

$$b_7 = \frac{\mu AI^*}{B+I^*} - d = 0$$

$$\omega^6 + (b_4^2 - b_1^2 - 2b_1b_7 - b_7^2 + 2b_1b_7)\omega^4 + (-2b_4^2b_1b_7 - 2b_4b_2b_7b_3 + b_1^2b_4^2 + 2b_1b_4^2b_7 + 2b_1b_4b_2b_3 + b_7^2b_4^2 + 2b_7b_4b_2b_3 + b_2^2b_3^2 - b_1^2b_7^2)\omega^2 + b_1^2b_7^2b_4^2 + 2b_1b_7^2b_4b_2b_3 + b_2^2b_7^2b_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^6 - 0,022684\omega^4 + 0,0679332096\omega^2 = 0 \quad (20)$$

Karena $\omega > 0$, maka dipilih $\omega_1 = 0,368769575$. Kemudian dicari nilai τ_k dengan mensubstitusikan nilai-nilai b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 dan ω_k ke persamaan berikut.

$$\tau_k = \left(-\frac{\omega_k^3 b_1^2 b_4 + \omega_k^3 b_1 b_2 b_3 + \omega_k^3 b_7^2 b_4 + \omega_k^5 b_4 + \omega_k b_1^2 b_7^2 b_4 + \omega_k b_1 b_7^2 b_2 b_3}{\omega_k^2 b_7^2 b_2 b_3 + \omega_k^4 b_2 b_3} \right)$$

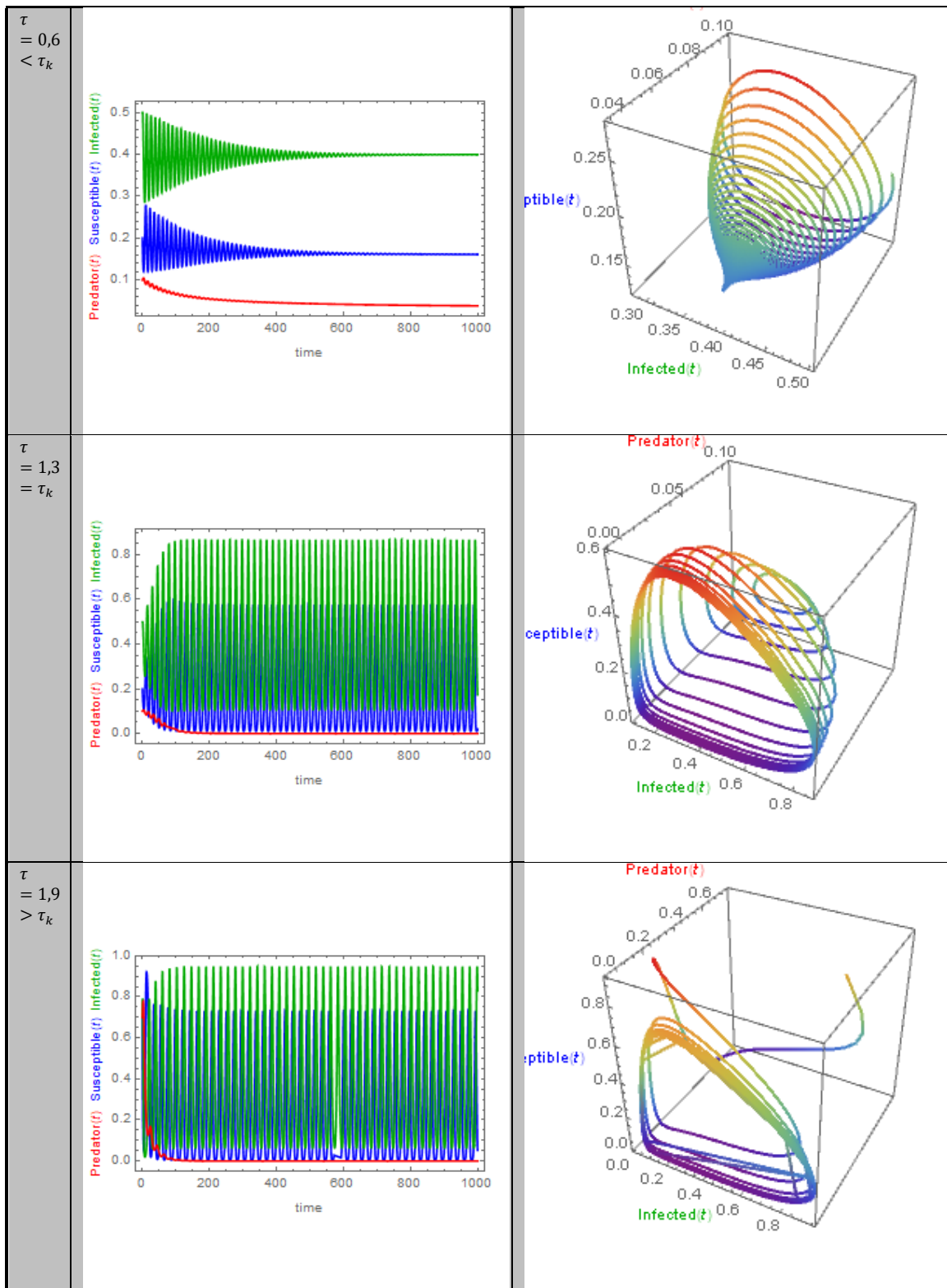
$$\Leftrightarrow \tau_k = 1,316861333.$$

Pada tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Tabel 2. Nilai waktu tunda pada jarak $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

k	τ
0	1,316861333
1	18,35510346
2	35,3933456
\vdots	\vdots
n	τ_n

Dalam artikel ini, hanya dibahas nilai waktu tunda pada saat, sebelum dan sesudah nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0$. Pada simulasi ini akan disediakan tiga kasus untuk menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf.



Gambar 2. Bidang solusi dan potret fase di E^*

4. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan penondimensioalan model, diperoleh model matematika S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling tipe II.

1. Dari model tersebut diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu E_0 , E_1 , E_2 dan E^* dengan asumsi terdapat titik ekuilibrium E_0, E_1, E_2 dan E^* jika $C < m, \mu A > D$ dan $-m(\mu A - D) + BDm^2 + C(\mu A - D) < 0$
2. Dari analisis kestabilan diperoleh empat titik ekuilibrium yang stabil pada kondisi tertentu, yaitu titik E_2 stabil jika $\mu A(C - m) + DBm^2 + D(m - C) > 0$ dan E^* stabil jika $\mu^2 A^2(1 + C - m) + \mu AD(-1 + Bm(m - 1)) + D^2(m(1 + Bm) - C) > 0, \mu^3 A^3(1 - D)(m - C) + \mu^2 A^2((C - m)(1 - 3D) + DBm^2 - 2Bm^2) + \mu AD^2((3D + 1)(-m + C) - 2DBm^2 + m^3 B^2 + mCB) + D^3((D + 1)(m - C) - mBC + Bm^2(2 + Bm) + m^3 B^2 + DBm^2 + 2Bm^2) > 0$ and $\mu^5 A^5(m - C + C^2(D - 1) + 2mC(1 - D) + m^2(D - 1)) + \mu^4 A^4(-3BDm^2(1 - m) + DmBC(1 - 3m) + D(m^2 + C^2) - 2Dm(1 + C) + 2CD(1 + 3mD) + 2D^2Bm^2(C - m) - 3D^2(m^2 + C^2)) + \mu^3 A^3(-4mCD^2(D + 1) - 4D^3Bm^2(C - m) + 3D^2Bm^2(1 - Bm^2 + mB) - CD^2Bm(-C + m) + 2C^2D^2(1 + D) + D^2m^3B^2(C + Dm) + 2m^2D^2(1 + D)) + \mu^2 A^2(4mCD^3(1 - D) - 2CD^3(1 - CD + C) - D^3m^4B^2(B - Bm + D) + 2D^3m(1 - m + Dm) + CD^3Bm(7m - C + 2m^2B - 3 - mB) + 3D^3Bm^2(1 - 2m - Bm^2)) + \mu A(D^4C(1 - 3CD - C) - D^4m(1 + m + 3Dm) + D^4Bm^2(3Bm^2 + 2B^2m^3 - 3 - DBm^2 - 3Bm - m^2B^2 - 4Dm) + D^4BmC(-Bm^2 + 4Dm + 2 - C + m + Bm) + 2mCD^4(3D + 1)) - 2D^5mC(1 + D) + C^2D^5(D + 1) + D^5Bm^3(3 + B^2m^2 + 2D + DBm + 3Bm) + D^5BmC(-4m - 2Dm + C - 2Bm^2) + D^5m^2(1 + D) > 0.$
3. Dalam menganalisis keberadaan bifurkasi Hopf, model dibagi menjadi tiga kasus dimana setiap kasus mengalami peningkatan nilai parameter waktu tunda pada populasi *predator*(τ). Pada kasus $\tau = \tau_k$ terjadi perubahan kestabilan titik interior dari spiral stabil menjadi spiral tidak stabil dan muncul limit cycle. Fenomena ini merupakan ciri dari bifurkasi Hopf. Dengan memilih parameter bifurkasi yang tepat, dianalisis stabilitas local dan bifurkasi Hopf. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Ketika terjadi bifurkasi Hopf, grafik pada bidang solusi menunjukkan Gerakan osilasi yang konstan. Jika $\tau < \tau_k$, maka solusi system terkendali berada dalam keadaan seimbang. Kemudian Ketika $\tau > \tau_k$ solusi system terus berfluktuasi menyebabkan kondisi system tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- 1 Usmandjanovna AK. Ecology as an Independent Science. International Journal on Orange Technologies. 2020; 02: 52-53;
- 2 Basilaia M, Bogdanova I & Dymnikova. Cosmoharmonic principles of environmental safety. E3S Web of Conferences. 2019; 135;
- 3 Chow A. Food Chain in Biodiversity. Journal of Ecosystem & Ecography. 2022; 12;
- 4 Riley L W. Differentiating Epidemic from Endemic or Sporadic Infectious Disease Occurrence. ASM Journal. 2019; 7(4);
- 5 Lopez LAU & Morales AXG. Time-dependent SI model for epidemiology and applications to Covid-19. Gravitation, Mathematical Physics and Field Theory. 2021; 67: 1-15;
- 6 Blasius B. Permanent predator-prey oscillations. Research elucidates fundamental ecological concept of predator-prey interactions. NATURE. UNIVERSITY OF OLDENBURG. 2019
- 7 Christodoulides Y T& Damianou PA. DARBOUX POLYNOMIALS FOR LOTKA-VOLTERRA SYSTEMS IN THREE DIMENSIONS. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2009; 16(3): 339-354;

- 8 Brauer, F. & C.C. Chaves. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer Science & Business Media: New York;
- 9 Tewa IJ, Djewnan YV dan Bowong. Predator Prey Model with Holling Response Function Of type II and SIS Infectious Disease. *Applied Mathematical Modelling*.2013; 37: 4825-4841;
- 10 Mahmoud M, Mohd HM, A. I. Ahmad II, and Farah AA. Dynamical analysis of a fractional-order ecoepidemiological model with disease in prey population. *Advances in Difference Equations*. 2020; 1: 48;
- 11 Fardinah, Qadrini L & Fatimah MF. Analisis Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Adanya Mangsa Sakit. *Saintifik*. 2021;7(2):139-145;
- 12 Bob WK, George AKVV, & Krishna PD. Stabilization and Complex Dynamics in Predator-Prey Model with Predator Suffering from an Infectious Disease. *Ecological Complexity*. 2011; 8: 113-122;
- 13 Ni'mah K, Waluya SB, Kharis M. A dynamic S-I-P model with disease in the prey population and holling type II functional response. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. 2016; 100(5): 727-746;
- 14 William EB & Richard CD. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition, John Wiley & Sons, New York. 2001;
- 15 Pastor J. *Mathematical Ecology of Population and Ecosystem*. John Willey & Son,Singapore. 2008.